非線形減衰振動子に対する量子確率微分方程式の微視的導出(第5回『非平衡系の統計物理』シンポジウム,研究会報告)

斎藤, 健; 有光, 敏彦

非線形減衰振動子に対する量子確率微分方程式の微視的導出

斎藤 健，有光 敏彦*
茨城大学理工学研究科，*筑波大学物理

1 はじめに

散逸のある非線形量子系では，系の緩和過程は非線形性により影響を受ける。系の非線形性が緩和に及ぶす影響を取り入れた量子マスター方程式が，減衰理論 [1, 2] の枠組みで導出された [3]-[7]。

注目する系のハミルトニアンが

$$H_S = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} g a^\dagger a^\dagger a a, \tag{1}$$

で与えられる非線形減衰振動子を考えよう。a, $a^\dagger$は交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \quad [a,\ a] = 0, \tag{2}$$

を満たすボゾン演算子である。減衰理論における *non-conventional* **な取り扱い** [3]-[7] では，注目する系内の非線形性がその緩和に与える影響が考慮される。その結果系のダイナミクスは，注目する系の密度行列$\rho_S(t)$が正しい終状態であるカノニカル平衡状態の密度行列 $\mathrm{e}^{-\beta H_S}$に収束することを保証する。一方，減衰理論における *conventional* **な取り扱い**では，系の非線形性が緩和に及ぼす影響は無視され，$\rho_S(t)$ は調和振動子のカノニカル平衡状態 $\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}$に収束する。このことから，系の非線形性が緩和に及ぼす影響は，系の長時間の振る舞いに重要な役割を果たしていることが分かる。Haake 等 [7] は減衰理論における non-conventional な取り扱いにより，非線形減衰振動子に対する量子マスター方程式を導出した。

非平衡 Thermo Field Dynamics (NETFD)[8]-[12] の枠組みにおいて，量子 Langevin 方程式と量子確率 Liouville 方程式を含む量子確率微分方程式の系統的な正準演算子形式の体系が構成された [10]-[23]。この体系において，前述の非線形減衰振動子に対する量子確率微分方程式が構成された [20]。

Accardi 等 [24]-[28] は，量子確率過程に対して微視的な基礎付けを与えた。彼らは，ボゾン場の熱浴と相互作用する量子系を考察し，熱浴のボゾン場により構成される集団的ボゾン場 (collective boson field) とよばれる場が，弱結合極限 (van Hove 極限)[29] で量子 Wiener 過程に収束すること

を示した。また，相互作用表示における波動関数の時間発展方程式が，無限小時間発展演算子に量子Wiener過程の増分を含む量子確率微分方程式に収束することを示した。

この論文では，このAccardi等の手続きをNETFDの枠組みで非線形減衰振動子に適用し，系の非線形性が緩和に及ぼす影響を考慮した非線形減衰振動子に対する量子確率微分方程式を微視的なモデルから導出する。

2 微視的モデル

熱浴と相互作用する非線形振動子を考える。系のハミルトニアンは

$$H = H_0 + H_1, \tag{3}$$

$$H_0 = H_S + H_R, \tag{4}$$

$$H_1 = i\lambda \sum_k (a^\dagger b_k - b_k^\dagger a), \tag{5}$$

で与えられる。H_Sは注目する非線形振動子のハミルトニアン(1)であり，H_Rは熱浴のハミルトニアン

$$H_R = \sum_k \epsilon_k b_k^\dagger b_k, \tag{6}$$

である。ただし，$a,\, a^\dagger$および$b_k,\, b_k^\dagger$はそれぞれ交換関係(2)および

$$[b_k,\ b_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [b_k,\ b_l] = 0, \tag{7}$$

を満たすボゾン演算子である。

ティルド演算子$\tilde{a},\, \tilde{a}^\dagger,\, \tilde{b}_k,\, \tilde{b}_k^\dagger$を導入する。ティルド共役$\sim$は,

$$(A_1A_2)^\sim = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{8}$$

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^\sim = c_1^*\tilde{A}_1 + c_2^*\tilde{A}_2, \tag{9}$$

$$(\tilde{A})^\sim = A, \tag{10}$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger, \tag{11}$$

で定義される。ただし，$A_1,\, A_2,\, A$は任意の演算子であり，$c_1,\, c_2$はc-数である。$(a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$の表現空間を$\mathcal{H}_S$，$(b, b_k^\dagger, \tilde{b}_k, \tilde{b}_k^\dagger)$の表現空間を$\mathit{\Gamma}_R$と記す。

$\mathit{\Gamma}_R$の熱真空(thermal vacuum)$|0_R\rangle$および$\langle 1_R|$は数演算子の真空期待値

$$\langle 1_R|b_k^\dagger b_l|0_R\rangle = \bar{n}_k\delta_{kl}, \tag{12}$$

により特徴付けられる。ただし，$\bar{n}_k$はプランク分布

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\mathrm{e}^{\epsilon_k/T} - 1}, \tag{13}$$

である。Γ_R上の消滅演算子$(c_k, \tilde{c}_k)$と生成演算子$(c_k^{\dagger}, \tilde{c}_k^{\dagger})$をボゴリューボフ変換

$$\begin{pmatrix} c_k \\ \tilde{c}_k^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n}_k + 1 & -\bar{n}_k \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ \tilde{b}_k^{\dagger} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

により導入する。$(c_k, \tilde{c}_k)$および$(c_k^{\dagger}, \tilde{c}_k^{\dagger})$は正準交換関係

$$[c_k,\ c_l^{\dagger}] = [\tilde{c}_k,\ \tilde{c}_l^{\dagger}] = \delta_{kl}, \tag{15}$$

を満たし，熱真空を消去する：

$$c_k|0_R\rangle = \tilde{c}_k|0_R\rangle = 0, \quad \langle 1_R|c_k^{\dagger} = \langle 1_R|\tilde{c}_k^{\dagger} = 0. \tag{16}$$

表現空間Γ_Rは，$|0_R\rangle$に$(c_k^{\dagger}, \tilde{c}_k^{\dagger})$を，$\langle 1_R|$に$(c_k, \tilde{c}_k)$を繰り返しに作用することにより得られる基底ベクトルにより張られる。

相互作用表示の時間発展演算子$\hat{U}_\lambda(t)$を

$$\hat{U}_\lambda(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}, \tag{17}$$

により定義する。ただし，

$$\hat{H} = H - \tilde{H}, \quad \hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0, \tag{18}$$

である。$\hat{U}_\lambda(t)$は熱空間(thermal space)$\mathcal{H}_S \otimes \Gamma_R$に作用する演算子であり，その時間発展は

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_\lambda(t) = -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_\lambda(t), \tag{19}$$

により記述される。ただし，$\hat{H}_1^I(t)$は無限小時間発展演算子

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^I(t) &= \mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t}(H_1 - \tilde{H}_1)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= i\lambda \sum_k \left\{ a^{\dagger} b_k \mathrm{e}^{-i[\epsilon_k - (\omega + g a^{\dagger} a)]t} - b_k^{\dagger} \mathrm{e}^{i[\epsilon_k - (\omega + g a^{\dagger} a)]t} a \right\} - \text{t.c.}, \end{aligned} \tag{20}$$

である。t.c.はその前の項のティルド共役を意味する。

真空状態$|0, \tilde{0}\rangle$および$\langle 0, \tilde{0}|$を

$$a|0, \tilde{0}\rangle = \tilde{a}|0, \tilde{0}\rangle = 0, \quad \langle 0, \tilde{0}|a^{\dagger} = \langle 0, \tilde{0}|\tilde{a}^{\dagger} = 0, \tag{21}$$

により導入し，ケットベクトル$|m, \tilde{n}\rangle$およびブラベクトル$\langle m, \tilde{n}|$を

$$|m, \tilde{n}\rangle = \frac{(a^{\dagger})^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\tilde{a}^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0, \tilde{0}\rangle, \quad \langle m, \tilde{n}| = \langle 0, \tilde{0}| \frac{a^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\tilde{a})^n}{\sqrt{n!}}, \tag{22}$$

と定義する。$|m,\tilde{n}\rangle$ および $\langle m,\tilde{n}|$ は規格直交条件

$$\langle m,\tilde{n}|m',\tilde{n}'\rangle = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \tag{23}$$

と完全性の条件

$$\sum_{mn} |m,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}| = I, \tag{24}$$

を満足する。表現空間 $\mathcal{H}_S$ は基底ベクトル $|m,\tilde{n}\rangle$ および $\langle m,\tilde{n}|$ により張られる。

$\hat{H}_1^I(t)$ はベクトル $|m,\tilde{n}\rangle$ および $\langle m,\tilde{n}|$ を用いて

$$\begin{aligned}\hat{H}_1^I(t) &= i\lambda\sum_{mn}\sum_k \Big\{\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|b_k \mathrm{e}^{-i(\epsilon_k-\phi_m)t} \\ &\quad -b_k^\dagger e^{i(\epsilon_k-\phi_m)t}\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|\Big\} - \mathrm{t.c.},\end{aligned} \tag{25}$$

のように展開される。ただし，$\phi_n = \omega + gn$ である。(25) において

$$|m,\tilde{n}\rangle^\sim = |n,\tilde{m}\rangle, \quad \langle m,\tilde{n}|^\sim = \langle n,\tilde{m}|, \tag{26}$$

が成り立つことに注意する。

3 $\hat{U}_\lambda(t)$ の評価

Γ_R に属する**集団的指数ベクトル** *(collective exponential vector)* $|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle$ および $\langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])|$ を

$$|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle = \exp\left[\sum_k\sum_n \Big(z_{nk}[S_n,T_n]c_k^{\natural} + w_{nk}^*[S_n',T_n']\tilde{c}_k^{\natural}\Big)\right]|0_R\rangle, \tag{27}$$

$$\langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])| = \langle 1_R|\exp\left[\sum_k\sum_n \left(z_{nk}^*[S_n,T_n]c_k + w_{nk}[S_n',T_n']\tilde{c}_k\right)\right], \tag{28}$$

により定義する。ただし，$z_{nk}[S_n,T_n]$, $w_{nk}[S_n',T_n']$ は c-数 z_{nk}, w_{nk} を用いて，

$$z_{nk}[S_n,T_n] = \lambda\int_{S_n/\lambda^2}^{T_n/\lambda^2} du\ z_{nk}\mathrm{e}^{i(\epsilon_k-\phi_n)u}, \tag{29}$$

$$w_{nk}[S_n',T_n'] = \lambda\int_{S_n/\lambda^2}^{T_n/\lambda^2} du\ w_{nk}\mathrm{e}^{i(\epsilon_k-\phi_n)u}, \tag{30}$$

と定義される。指数ベクトルは c_k, $c_k^{\natural}$ とそのティルド共役の作用に対して次の性質をもつ:

$$c_k|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle = \sum_n z_{nk}[S_n,T_n]|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle, \tag{31}$$

$$\tilde{c}_k|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle = \sum_n w_{nk}^*[S_n',T_n']|e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S_n',T_n'])\rangle, \tag{32}$$

$$\langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|c_k^{\circ} = \langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|\sum_n z^*_{nk}[S_n,T_n], \quad (33)$$

$$\langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|\tilde{c}_k^{\circ} = \langle e_\lambda(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|\sum_n w_{nk}[S'_n,T'_n]. \quad (34)$$

これは，集団的指数ベクトルがコヒーレント状態であることを示す。

$\hat{K}_\lambda(t)$を

$$\begin{aligned}\hat{K}_\lambda(t) &= \langle e_\lambda(\sum_n z_{1n}[S_{1n},T_{1n}],\sum_n w_{1n}[S'_{1n},T'_{1n}])|\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)\\ &\times|e_\lambda(\sum_n z_{2n}[S_{2n},T_{2n}],\sum_n w_{2n}[S'_{2n},T'_{2n}])\rangle,\end{aligned} \quad (35)$$

と定義する。(19)を用いると，$\hat{K}_\lambda(t)$の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{K}_\lambda(t) &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{d}{d(t/\lambda^2)}\hat{K}_\lambda(t)\\ &= \langle e_\lambda(\sum_n z_{1n}[S_{1n},T_{1n}],\sum_n w_{1n}[S'_{1n},T'_{1n}])|\frac{-i}{\lambda^2}\hat{H}_1^I(t/\lambda^2)\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)\\ &\times|e_\lambda(\sum_n z_{2n}[S_{2n},T_{2n}],\sum_n w_{2n}[S'_{2n},T'_{2n}])\rangle,\end{aligned} \quad (36)$$

となることが分かる。(25)式の$(b_k,b_k^\dagger,\tilde{b}_k,\tilde{b}_k^\dagger)$を$(c_k,c_k^{\circ},\tilde{c}_k,\tilde{c}_k^{\circ})$を用いて書き換えた表式を(36)に代入すると，

$$\frac{d}{dt}\hat{K}_\lambda(t) = \hat{I}_\lambda + \hat{II}_\lambda, \quad (37)$$

を得る。ただし，$\hat{I}_\lambda$, $\hat{II}_\lambda$は，

$$\begin{aligned}\hat{I}_\lambda &= \frac{1}{\lambda}\langle e_\lambda(\sum_n z_{1n}[S_{1n},T_{1n}],\sum_n w_{1n}[S'_{1n},T'_{1n}])|\\ &\times\sum_{mn}\sum_k\Big\{\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\bar{n}_k\tilde{c}_k^{\circ}\mathrm{e}^{-i(\epsilon_k-\phi_m)t/\lambda^2}\\ &-(\bar{n}_k+1)c_k^{\circ}\mathrm{e}^{i(\epsilon_k-\phi_m)t/\lambda^2}\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|+\mathrm{t.c.}\Big\}\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)\\ &\times|e_\lambda(\sum_n z_{2n}[S_{2n},T_{2n}],\sum_n w_{2n}[S'_{2n},T'_{2n}])\rangle,\end{aligned} \quad (38)$$

および

$$\begin{aligned}\hat{II}_\lambda &= \frac{1}{\lambda}\langle e_\lambda(\sum_n z_{1n}[S_{1n},T_{1n}],\sum_n w_{1n}[S'_{1n},T'_{1n}])|\\ &\times\sum_{mn}\sum_k\Big\{\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|c_k\mathrm{e}^{-i(\epsilon_k-\phi_m)t/\lambda^2}\\ &-\tilde{c}_k\mathrm{e}^{i(\epsilon_k-\phi_m)t/\lambda^2}\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|+\mathrm{t.c.}\Big\}\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)\\ &\times|e_\lambda(\sum_n z_{2n}[S_{2n},T_{2n}],\sum_n w_{2n}[S'_{2n},T'_{2n}])\rangle,\end{aligned} \quad (39)$$

である。

(31)–(34) と関係式

$$c_k\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2) = \hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)c_k + [c_k,\ \hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)], \tag{40}$$

$$\tilde{c}_k\hat{U}_\lambda(t/\lambda^2) = \hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)\tilde{c}_k + [\tilde{c}_k,\ \hat{U}_\lambda(t/\lambda^2)], \tag{41}$$

を用いて$\hat{I}_\lambda$と$\hat{II}_\lambda$の$\lambda \to 0$極限を評価すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{K}(t) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{d}{dt}\hat{K}_\lambda(t)\left(\hat{I}_\lambda + \hat{II}_\lambda\right) \\
&= -i\sum_{mn}\Big\{i\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|2\kappa(\phi_m)\bar{n}(\phi_m)w_{1m}(\phi_m)\chi_{[S'_{1m},T'_{1m}]}(t) \\
&\quad -i2\kappa(\phi_m)[\bar{n}(\phi_m)+1]z^*_{1m}(\phi_m)\chi_{[S_{1m},T_{1m}]}(t)\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}| \\
&\quad +i\sqrt{n+1}|m,\widetilde{n+1}\rangle\langle m,\tilde{n}|2\kappa(\phi_n)\bar{n}(\phi_n)z^*_{1n}(\phi_n)\chi_{[S_{1n},T_{1n}]}(t) \\
&\quad -i2\kappa(\phi_n)[\bar{n}(\phi_m)+1]w_{1n}(\phi_n)\chi_{[S'_{1n},T'_{1n}]}(t)\sqrt{n+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\widetilde{n+1}|\Big\}\hat{K}(t) \\
&\quad -i\sum_{mn}\Big\{i\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|2\kappa(\phi_m)z_{2m}(\phi_m)\chi_{[S_{2m},T_{2m}]}(t) \\
&\quad -i\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|2\kappa(\phi_m)w^*_{2m}(\phi_m)\chi_{[S'_{2m},T'_{2m}]}(t) \\
&\quad +i\sqrt{n+1}|m,\widetilde{n+1}\rangle\langle m,\tilde{n}|2\kappa(\phi_n)w^*_{2n}(\phi_n)\chi_{[S'_{2n},T'_{2n}]}(t) \\
&\quad -i\sqrt{n+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\widetilde{n+1}|2\kappa(\phi_n)z_{2n}(\phi_n)\chi_{[S_{2n},T_{2n}]}(t)\Big\}\hat{K}(t) \\
&\quad -i\left(\hat{\Delta}+i\hat{\Pi}\right)\hat{K}(t),
\end{aligned} \tag{42}$$

を得る。ただし，

$$\hat{K}(t) = \lim_{\lambda\to 0}\hat{K}_\lambda(t), \tag{43}$$

である*。$\chi_{[S,T]}(t)$は

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & (t \geq 0), \\ 0, & (t < 0), \end{cases} \tag{44}$$

で定義されるステップ関数$\theta(t)$を用いて，

$$\chi_{[S,T]}(t) = \theta(t-S)\theta(T-t), \tag{45}$$

と定義される。また，演算子$\hat{\Delta}$および$\hat{\Pi}$はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta} &= \mathcal{P}\int d\epsilon\ \sum_{mn}\Big\{[\bar{n}(\epsilon)+1]\frac{\rho(\epsilon)}{\phi_m-\epsilon}(m+1)|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}| \\
&\qquad -(m+1)|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\bar{n}(\epsilon)\frac{\rho(\epsilon)}{\phi_m-\epsilon} - \text{t.c.}\Big\},
\end{aligned} \tag{46}$$

*この論文では，$\lambda \to 0$極限において$\hat{K}_\lambda(t)$が収束することを仮定する。

および

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} = & -\sum_{mn}\{\kappa(\phi_m)[\bar{n}(\phi_m)+1](m+1)|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}| \\ & +(m+1)|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\kappa(\phi_m)\bar{n}(\phi_m)+\text{t.c.}\} \\ & +2\sum_{m}\Big\{(m+1)|m+1,\widetilde{m+1}\rangle\langle m,\tilde{m}|\kappa(\phi_m)\bar{n}(\phi_m) \\ & +\kappa(\phi_m)[\bar{n}(\phi_m)+1](m+1)|m,\tilde{m}\rangle\langle m+1,\widetilde{m+1}|\Big\},\end{aligned} \tag{47}$$

と定義される。(42) を導出するに際して，

$$\sum_k \delta(\epsilon-\epsilon_k) = \rho(\epsilon), \tag{48}$$

により定義されるスペクトル関数$\rho(\epsilon)$を用いてkに関する和をϵに関する積分に変え，また，関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv\ \mathrm{e}^{\pm i(\epsilon-\phi_n)v} = 2\pi\delta(\epsilon-\phi_n), \tag{49}$$

を利用した。

4 量子 Wiener 過程

この章では，注目する系の非線形性の影響を受けた量子 Wiener 過程を構成する。

次の正準交換関係を満たすボゾン演算子 $c_t(\phi_n)$, $c_t^{\dagger}(\phi_n)$ とそのティルド共役を導入する:

$$[c_t(\phi_n),\ c_{t'}^{\dagger}(\phi_{n'})] = \delta(t-t')\delta_{nn'}, \tag{50}$$

$$[\tilde{c}_t(\phi_n),\ \tilde{c}_{t'}^{\dagger}(\phi_{n'})] = \delta(t-t')\delta_{nn'}. \tag{51}$$

これらは真空 $|\rangle$ と $\langle|$ を消す:

$$c_t(\phi_n)|\rangle = \tilde{c}_t(\phi_n)|\rangle = 0, \quad \langle|c_t^{\dagger}(\phi_n) = \langle|\tilde{c}_t^{\dagger}(\phi_n) = 0. \tag{52}$$

$(c_{t,k}^{\dagger}(\phi_n), \tilde{c}_{t,k}^{\dagger}(\phi_n))$ を真空 $|\rangle$ に，$(c_{t,k}(\phi_n), \tilde{c}_{t,k}(\phi_n))$ を真空 $\langle|$ に繰り返し作用して作られる基底ケットベクトルおよび基底ブラベクトル上に作られる Fock 空間をΓ_Wと記す。

Γ_Wに属する指数ベクトルを

$$\begin{aligned}&|e(\sum_n z_n[S_n,T_n], \sum_n w_n[S'_n,T'_n])\rangle \\ &= \exp\left[\int_0^{\infty} dt\ \sum_n \Big\{z_n[S_n,T_n](t)c_t^{\dagger}(\phi_n) + w_n^{*}[S'_n,T'_n](t)\tilde{c}_t^{\dagger}(\phi_n)\Big\}\right]|\rangle,\end{aligned} \tag{53}$$

$$\langle e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|$$
$$=\langle|\exp\left[\int_0^\infty dt\ \sum_n\{z_n^*[S_n,T_n](t)c_t(\phi_n)+w_n[S'_n,T'_n](t)\tilde{c}_t(\phi_n)\}\right], \tag{54}$$

と定義する。ただし，$z_n[S_n,T_n](t)$ と $w_n[S'_n,T'_n](t)$ はc-数 $z_n(\phi_n)$, $w_n(\phi_n)$ を用いてそれぞれ

$$z_n[S_n,T_n](t)=\sqrt{2\kappa(\phi_n)}\chi_{[S_n,T_n]}(t)z_n(\phi_n),\quad w_n[S'_n,T'_n](t)=\sqrt{2\kappa(\phi_n)}\chi_{[S'_n,T'_n]}(t)w_n(\phi_n), \tag{55}$$

と与えられる。

指数ベクトルは，消滅演算子 $(c_t(\phi_n),\tilde{c}_t(\phi_n))$ と生成演算子 $(c_t^{\dagger}(\phi_n),\tilde{c}_t^{\dagger}(\phi_n))$ の固有ベクトルあり，次の性質をもつ:

$$c_t(\phi_n)|e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])\rangle=z_n[S_n,T_n](t)|e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])\rangle, \tag{56}$$
$$\tilde{c}_t(\phi_n)|e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])\rangle=w_n^*[S'_n,T'_n](t)|e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])\rangle, \tag{57}$$
$$\langle e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|c_t^{\dagger}(\phi_n)=\langle e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|z_n^*[S_n,T_n](t), \tag{58}$$
$$\langle e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|\tilde{c}_t^{\dagger}(\phi_n)=\langle e(\sum_n z_n[S_n,T_n],\sum_n w_n[S'_n,T'_n])|w_n[S'_n,T'_n](t). \tag{59}$$

量子Wiener過程を

$$C_t(\phi_n)=\int_0^t ds\ c_s(\phi_n),\quad C_t^{\dagger}(\phi_n)=\int_0^t ds\ c_s^{\dagger}(\phi_n), \tag{60}$$

とそのティルド共役により定義する。増分 dC_τ, $dC_\tau^{\dagger}$ とそのティルド共役の積の規則は，$dC_t^{\dagger}(\phi_n)dC_t(\phi_{n'})$ などの指数ベクトルに関する行列要素を，指数ベクトルの性質 (56)–(59) を用いて評価することにより調べることができる。その結果，

$$dC_t(\phi_n)dC_t^{\dagger}(\phi_{n'})=\delta_{nn'}dt,\quad d\tilde{C}_t(\phi_n)d\tilde{C}_t^{\dagger}(\phi_{n'})=\delta_{nn'}dt, \tag{61}$$

を得る。他の積は0である [23]。

量子Wiener過程 $B_t(\phi_n)$, $B_t^\dagger(\phi_n)$ とそのティルド共役を

$$B_t(\phi_n)=C_t(\phi_n)+\bar{n}(\phi_n)\tilde{C}_t^{\dagger}(\phi_n),\quad B_t^\dagger(\phi_n)=\tilde{C}_t(\phi_n)+[\bar{n}(\phi_n)+1]C_t^{\dagger}(\phi_n), \tag{62}$$

とそのティルド共役により定義する。$B_t(\phi_n)$ と $B_t^\dagger(\phi_n)$ の定義 (62) と積の規則 (61) より，増分 $dB_t(\phi_n)$, $dB_t^\dagger(\phi_n)$ とそのティルド共役に関する積の規則が次のようになることが分かる [23]:

$$dB_t(\phi_n)dB_t^\dagger(\phi_{n'})=[\bar{n}(\phi_n)+1]\delta_{nn'}dt,\quad dB_t(\phi_n)d\tilde{B}_t(\phi_{n'})=\bar{n}(\phi_n)\delta_{nn'}dt, \tag{63}$$
$$dB_t^\dagger(\phi_n)dB_t(\phi_{n'})=\bar{n}(\phi_n)\delta_{nn'}dt,\quad dB_t^\dagger(\phi_n)d\tilde{B}_t^\dagger(\phi_{n'})=[\bar{n}(\phi_n)+1]\delta_{nn'}dt, \tag{64}$$
$$d\tilde{B}_t(\phi_n)dB_t(\phi_{n'})=\bar{n}(\phi_n)\delta_{nn'}dt,\quad d\tilde{B}_t(\phi_n)d\tilde{B}_t^\dagger(\phi_{n'})=[\bar{n}(\phi_n)+1]\delta_{nn'}dt, \tag{65}$$
$$d\tilde{B}_t^\dagger(\phi_n)dB_t^\dagger(\phi_{n'})=[\bar{n}(\phi_n)+1]\delta_{nn'}dt,\quad d\tilde{B}_t^\dagger(\phi_n)d\tilde{B}_t(\phi_{n'})=\bar{n}(\phi_n)\delta_{nn'}dt. \tag{66}$$

他の積は0である。

5 確率的時間発展演算子

演算子$\hat{U}(t)$を

$$\hat{K}(t) = \langle e(\sum_n z_{1n}[S_n, T_n], \sum_n w_{1n}[S'_n, T'_n])|\hat{U}(t)|e(z_{2n}[S_n, T_n], \sum_n w_{2n}[S'_n, T'_n])\rangle, \tag{67}$$

により定義する。(56)–(59) を用いると，(42) より$\hat{U}(t)$は量子確率微分方程式

$$\begin{aligned} d\hat{U}(t) = -i\Big\{ & \left(\hat{\Delta} + i\hat{\Pi}\right)\hat{U}(t)dt \\ & +i\sum_{mn}\Big[\sqrt{2\kappa(\phi_m)}\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\hat{U}(t)\circ dC_t(\phi_m) \\ & -\sqrt{2\kappa(\phi_m)}\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|\hat{U}(t)\circ d\tilde{C}_t(\phi_m) \\ & +\sqrt{2\kappa(\phi_n)}\sqrt{n+1}|m,\widetilde{n+1}\rangle\langle m,\tilde{n}|\hat{U}(t)\circ d\tilde{C}_t(\phi_n) \\ & -\sqrt{2\kappa(\phi_n)}\sqrt{n+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\widetilde{n+1}|\hat{U}(t)\circ dC_t(\phi_n)\Big] \\ & +i\sum_{mn}\Big[\sqrt{2\kappa(\phi_m)}d\tilde{C}_t^{\dagger}(\phi_m)\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\bar{n}(\phi_m) \\ & -\sqrt{2\kappa(\phi_m)}dC_t^{\dagger}(\phi_m)\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|[\bar{n}(\phi_m)+1] \\ & +\sqrt{2\kappa(\phi_n)}dC_t^{\dagger}(\phi_n)\sqrt{n+1}|m,\widetilde{n+1}\rangle\langle m,\tilde{n}|\bar{n}(\phi_n) \\ & -\sqrt{2\kappa(\phi_n)}d\tilde{C}_t^{\dagger}(\phi_n)\sqrt{n+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m,\widetilde{n+1}|[\bar{n}(\phi_n)+1]\Big]\circ\hat{U}(t)\Big\}, \end{aligned} \tag{68}$$

を満たすことが分かる。(68) は，演算子に対する通常の (確率的でない) 微分方程式 (19) から導かれたものである。ここでは，(68) が表す微分が，元の (19) の微分がしたがう通常の微分の計算規則にしたがうように，(68) をStratonovich型の確率微分方程式と解釈している†。記号∘はStratonovich積を表す。

Stratonovich積とIto積を結びつける関係式 [23]

$$X_t\circ dC_t(\phi_n) = X_t dC_t(\phi_n) + \frac{1}{2}dX_t dC_t(\phi_n), \quad \text{etc.}, \tag{69}$$

より，

$$X_t\circ dC_t(\phi_n) = dC_t(\phi_n)\circ X_t + \frac{1}{2}\left[dX_t dC_t(\phi_n) - dC_t(\phi_n)dX_t\right], \quad \text{etc.}, \tag{70}$$

---

†Stratonovich積とIto積を結びつける関係式 (69) を用いると

$$\hat{U}(t)\circ dC_t(\phi_n) = \hat{U}(t)dC_t(\phi_n) + \frac{1}{2}d\hat{U}(t)dC_t(\phi_n),$$

$$dC_t^{\dagger}(\phi_n)\circ\hat{U}(t) = dC_t^{\dagger}(\phi_n)\hat{U}(t) + \frac{1}{2}dC_t^{\dagger}(\phi_n)d\hat{U}(t),$$

となる。これらを用いて (68) をIto型に書き換えることができる。しかし，Stratonovich積とIto積の差である上式の右辺第二項が0になるので，形を変えることなく (68) をIto型に変換することができる。これは，(68) を初めからIto型と解釈できることを示している。

となることが分かる。(70) を用いて (68) 中の$\hat{U}(t)$ と $dC_t(\phi_n)$, $d\tilde{C}_t(\phi_n)$ の順序を入れ替えると，

$$d\hat{U}(t)=-i\left(\hat{\Delta}dt+d\hat{M}_t^I\right)\circ\hat{U}(t), \tag{71}$$

を得る。ただし，

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t^I &= i\sum_{mn}\sqrt{2\kappa(\phi_m)}\left[\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|dB_t(\phi_m)\right. \\ &\quad \left.-dB_t^\dagger(\phi_m)\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|\right]-\text{t.c.}, \end{aligned} \tag{72}$$

である。

6 量子確率微分方程式

6.1 量子確率 Liouville 方程式

確率的時間発展演算子$\hat{V}_f(t)$ を

$$\hat{V}_f(t)=\mathrm{e}^{-i\hat{H}_S t}\hat{U}(t), \quad \hat{H}_S=H_S-\tilde{H}_S, \tag{73}$$

と定義する。(71) を用いると，$\hat{V}_f(t)$ の時間発展方程式は

$$d\hat{V}_f(t)=-i\hat{H}_{f,t}dt\circ\hat{V}_f(t), \tag{74}$$

となることが分かる。ただし，

$$\hat{H}_{f,t}dt=(\hat{H}_S+\hat{\Delta})dt+d\hat{M}_t, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t &= \mathrm{e}^{-i\hat{H}_S t}d\hat{M}_t^I\mathrm{e}^{i\hat{H}_S t} \\ &= i\sum_{mn}\sqrt{2\kappa(\phi_m)}\left[\sqrt{m+1}|m+1,\tilde{n}\rangle\langle m,\tilde{n}|\mathrm{e}^{-i\phi_m}dB_t(\phi_m)\right. \\ &\quad \left.-dB_t^\dagger(\phi_m)\mathrm{e}^{i\phi_m}\sqrt{m+1}|m,\tilde{n}\rangle\langle m+1,\tilde{n}|\right]-\text{t.c.}, \end{aligned} \tag{76}$$

である。

(69) を用いると，Stratonovich 型の方程式 (74) を Ito 型に書き換えることができる。その結果は，

$$d\hat{V}_f(t)=-i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\hat{V}_f(t), \tag{77}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt=\hat{H}_{f,t}dt-i\frac{1}{2}\hat{H}_{f,t}dt\hat{H}_{f,t}dt, \tag{78}$$

である。積の規則 (63)–(66) を用いて$\hat{H}_{f,t}dt\hat{H}_{f,t}dt$ を計算すると，

$$\hat{H}_{f,t}dt\hat{H}_{f,t}dt=d\hat{M}_t d\hat{M}_t=-2\hat{\Pi}dt, \tag{79}$$

を得る。したがって，$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = (\hat{H}_S + \hat{\Delta} + i\hat{\Pi})dt + d\hat{M}_t, \tag{80}$$

となることが分かる。

熱真空 $|0_f(t)\rangle$ を

$$|0_f(t)\rangle = \hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle, \tag{81}$$

と定義する。(77) を用いると，Ito型の量子確率Liouville方程式

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt|0_f(t)\rangle, \tag{82}$$

が得られる。$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は (80) で与えられる。

Γ_W の熱ブラ真空 $\langle|$ をIto型の確率Liouville方程式 (82) に作用すると，

$$d\langle|0_f(t)\rangle = -i\langle|\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt|0_f(t)\rangle = -i\hat{H}dt\langle|0_f(t)\rangle, \tag{83}$$

となることが分かる。ただし，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{\Delta} + i\hat{\Pi}, \tag{84}$$

である。ここで，$|0_f(0)\rangle$ が，注目する系の時刻 $t = 0$ での熱真空 $|0_S\rangle$ と Γ_W の熱真空 $|\rangle$ を用いて $|0_f(0)\rangle = |0_S\rangle|\rangle$ と表されることを仮定すると，Ito積の性質

$$\langle|dB_t(\phi_n)\hat{V}_f(t)|\rangle = 0, \quad \langle|dB_t^\dagger(\phi_n)\hat{V}_f(t)|\rangle = 0, \tag{85}$$

$$\langle|d\tilde{B}_t(\phi_n)\hat{V}_f(t)|\rangle = 0, \quad \langle|d\tilde{B}_t^\dagger(\phi_n)\hat{V}_f(t)|\rangle = 0, \tag{86}$$

により

$$\langle|d\hat{M}_t|0_f(t)\rangle = \langle|d\hat{M}_t\hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle = 0, \tag{87}$$

が成り立つことを用いた。$|0(t)\rangle = \langle|0_f(t)\rangle$ とおくと，(83) より量子マスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \tag{88}$$

が得られる。

6.2 量子Langevin方程式

注目する系の任意の演算子 A に対して，Heisenberg演算子

$$A(t) = \hat{V}_f^{-1}(t)A\hat{V}_f(t), \tag{89}$$

を定義する。Ito型の計算規則にしたがい，(89)の微分を計算する。その際，$\hat{V}_f(t)$の方程式(77)と$\hat{V}_f^{-1}(t)$ の方程式

$$d\hat{V}_f^{-1}(t) = i\hat{V}_f^{-1}(t)\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^{(-1)}dt, \quad \hat{\mathcal{H}}_{f,t}^{(-1)}dt = \hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt + id\hat{M}_t d\hat{M}_t, \tag{90}$$

を用いると，Ito型の量子Langevin方程式

$$\begin{aligned} dA(t) &= d\hat{V}_f^{-1}(t)A\hat{V}_f(t) + \hat{V}_f^{-1}(t)Ad\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f^{-1}(t)Ad\hat{V}_f(t) \\ &= i\left[\hat{\mathcal{H}}_f(t)dt,\ A(t)\right] - d\hat{M}(t)\left[d\hat{M}(t),\ A(t)\right], \end{aligned} \tag{91}$$

を得る。ただし，

$$\hat{\mathcal{H}}_f(t)dt = \hat{V}_f^{-1}(t)\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\hat{V}_f(t), \tag{92}$$

および

$$d\hat{M}(t) = \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{M}_t\hat{V}_f(t), \tag{93}$$

である。

真空$\langle\!\langle 1| = \langle|\langle 1_S|$を(91)に作用すると，ベクトル$\langle\!\langle 1|A(t)$に対する方程式

$$d\langle\!\langle 1|A(t) = -i\langle\!\langle 1|A(t)\left[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt + d\hat{M}(t)\right], \tag{94}$$

を得る。ただし，

$$\langle\!\langle 1|\hat{\mathcal{H}}_f(t) = 0, \quad \langle\!\langle 1|d\hat{M}(t) = 0, \tag{95}$$

を用いた。さらに，$|0\rangle\!\rangle = |0_S\rangle|\rangle$ を(94)に作用し，**熱状態条件**

$$\langle 1|\tilde{A}^\dagger(t) = \langle 1|A(t), \tag{96}$$

と(85)および(86) を用いると，真空期待値$\langle\!\langle 1|A(t)|0\rangle\!\rangle$の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t)|0\rangle\!\rangle = i\langle\!\langle 1|\left[H_S(t),\ A(t)\right]|0\rangle\!\rangle + \langle\!\langle 1|A(t)\hat{\Pi}(t)|0\rangle\!\rangle, \tag{97}$$

を得る。(97)は量子マスター方程式(88) からも得ることができる。

7 まとめと議論

この論文では，Accardiらの手続きを熱浴と相互作用する非線形振動子に適用することにより，非線形減衰振動子に対する量子確率微分方程式を導出した。

熱浴の表現空間に属する集団的指数ベクトルを用いて時間発展演算子の行列要素を作り，その運動方程式が弱結合極限において，確率的時間発展演算子の，量子Wiener過程の表現空間に属す

る指数ベクトルによる行列要素の運動方程式に収束することを示した。その確率的時間発展演算子は量子確率微分方程式を満たすことが分かった。このように，ミクロなモデルの時間発展演算子の方程式が量子確率微分方程式に収束することが示された。ただし，この収束は演算子の行列要素の意味での収束であることに注意する。このことは，演算子に対する通常の微分方程式から量子確率微分方程式への移行が，弱結合極限による表現空間の変更と捉えられることを示す。すなわち，NETFDの体系の中心的な概念である表現空間の変更という概念で，系のダイナミクスの粗視化のレベルの変更を捉えることができることが示されたわけである。

注目する系内の非線形性の効果を考慮した量子Wiener過程を，その表現空間とともに構成した。この量子Wiener過程が時間発展に与える影響は，量子マスター方程式と観測量の期待値に対する運動方程式の表現に現れている。非線形性の効果を考慮した量子Wiener過程が系に与える影響をさらに調べていくことは，今後の課題である。

参考文献

[1] F. Shibata and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan. **49** (1980) 891, and references therein.

[2] T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 1720.

[3] T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata, Physica **A100** (1980) 507.

[4] T. Arimitsu, Physica **A104** (1980) 126.

[5] T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 1054.

[6] M. Ban and T. Arimitsu, Physica **A129** (1985) 455.

[7] F. Haake, H. Risken, C. Savage and D. Walls, Phys. Rev. A **34** (1986) 3969.

[8] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[9] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[10] T. Arimitsu, in *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) 207.

[11] T. Arimitsu, Lecture Note of the *Summer School for Younger Physicists in Condensed Matter Physics* [published in "Bussei Kenkyu" (Kyoto) **60** (1993) 491-526, written in English], and the references therein.

[12] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Lviv, Ukraine) **4** (1994) 26.

[13] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.

[14] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **6** (1992) 1319.

[15] T. Arimitsu and T. Saito, Bussei Kenkyu **59-2** (1992) 213, in Japanese.

[16] T. Arimitsu and T. Saito, in Proceedings of the Conference on Field Theory and Collective Phenomena in Memory of Prof. Hiroomi Umezawa, eds. F. C. Khanna and G. W. Semenoff (World Scientific) (1995) 250.

[17] T. Arimitsu and T. Saito, Vistas in Astronomy **37** (1993) 99.

[18] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, Physica **A177** (1991) 329.

[19] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, in *Structure: from Physics to General Systems*, eds. M. Marinaro and G. Scarpetta (World Scientific, 1991) 163.

[20] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 623.

[21] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 1951.

[22] T. Saito and T. Arimitsu, Bussei Kenkyu **62-1** (1994) 215, in Japanese.

[23] T. Saito and T. Arimitsu, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997) 7573.

[24] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G, Lu, Lect. Notes in Math. **1396** (Springer 1989) 20.

[25] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G, Lu, Commun. Math. Phys. **131** (1990) 537.

[26] L. Accardi and Y. G, Lu, Ann. Inst. Henri Poincaré **54** (1991) 435.

[27] L. Accardi and L. Y. Gang, *Quantum Measurements in Optics*, eds. P. Tombesi and D. F. Walls, (Plenum Press, New York 1992) 247.

[28] L. Accardi, J. Gough and Y. G, Lu, Rep. Math. Phys. **36** (1995) 155.

[29] L. van Hove, Physica **21** (1955) 617.

[30] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. **93** (1984) 301.